Sommaire

1. Séries Entières, Convergence 1
1.1. Série entière 1
1.2. Rayon de convergence 1
1.3. Disque ouvert de convergence 2
1.4. Comparaison, équivalence... 3
1.5. Recherche du rayon de convergence 3
1.6. À ne pas oublier ! 4

2. Somme d'une Série Entière 5
2.1. Intervalle de convergence, continuité 5
2.2. Dérivation et intégration terme à terme 5
2.3. Développements usuels 5

3. Développement en S.E., Somme de S.E. 7
3.1. Fonction développable en série entière 7
3.2. Développement en série entière 8
3.3. Sommation de certaines séries entières 8

4. Exponentielle complexe 9
4.1. Exponentielle complexe 9
4.2. Cohérence de cette définition 9

Une série de fonctions est une série du type : $\sum f_n(x)$.
Nous n'avons pas à notre programme d'étude générale des séries de fonctions. Nous avons cependant à étudier deux types de séries de fonctions que sont les séries entières et les séries de Fourier.
On peut dire de toutes façons, qu'à x fixé, il s'agit d'une série numérique. Ainsi, l'ensemble des x pour lesquels la série $\sum f_n(x)$ converge sera l'ensemble de définition de la somme.
Cette somme est donc une fonction de x. Se posent alors les problèmes usuels, cette fonction est-elle continue, dérivable ?...

1. Séries Entières, Convergence

1.1. Série entière

Définition : Une **série entière** de la variable z est une série de la forme : $\sum a_n z^n$.
avec $z \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple : Un polynôme est un cas très particulier et sans intérêt de série entière.

Par contre, une série géométrique est le premier cas de série entière rencontré (sans le dire) dans le cadre des séries géométriques.

Pour une valeur de z fixée à z_0 par exemple, la série $\sum a_n z_0^n$ est une série numérique.
Pour les valeurs de z telles que la série converge, on définit donc, point par point, une fonction de la variable z par : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Un des objets de ce chapitre est d'étudier des propriétés de ces fonctions.

Quand la variable est réelle, on va plutôt la noter x que z.

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} z^n$ est donc une série entière où $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.
Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} z^{2n}$ est aussi une série entière où $a_n = \dfrac{1}{n!}$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair...

1.2. Rayon de convergence

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière,
alors, il existe R un réel positif ou « $+\infty$ » tel que : $R = \sup\{r, r \in \mathbb{R}_+, \ \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$.
R est appelé le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Démonstration : $I = \{r, r \in \mathbb{R}_+, \ \sum |a_n|\, r^n \text{ converge}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit il est borné et admet alors une borne supérieure, soit il n'est pas borné et $R = +\infty$. ■

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Soit $r \geqslant 0$, on sait que $\sum r^n$ ne converge que si $r < 1$ et $\sup\, [0,1[\ = 1$. On a donc $R = 1$.

Théorème : (Lemme d'Abel)
Si on a un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors, pour tout z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Ce qui nous donne le théorème suivant qu'on utilisera quand le moyen plus simples qui suit, l'utilisation du théorème de d'Alembert, ne s'applique pas :

Théorème : $R = \sup\,\{r, r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

L'intérêt de ce théorème est qu'il suffit d'étudier la **suite** $(|a_n|\, r^n)$ pour déterminer le rayon de convergence. Il est donc inutile d'étudier la **série**, ce qui est plus complexe. Le premier résulte immédiatement de la convergence d'une série entière, on montre le second :
Démonstration : On a $(|a_n|\, r^n)$ est bornée d'où $R \geqslant r$, ce qui entraîne

$$R \geqslant \sup \left\{ r, r \in \mathbb{R}_+, \ \lim_{n\to\infty} |a_n|\, r^n = 0 \right\}$$

Réciproquement, si $(|a_n|\, r^n)$ n'est pas bornée, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n|\, r^n \neq 0$, la série diverge et donc $r \geqslant R$.
Ce qui achève la démonstration. ■

On reviendra rapidement sur les moyens de calcul pratique de ce rayon de convergence. Signalons qu'il s'agit d'une notion fondamentale dans l'étude des séries entières.

1.3. Disque ouvert de convergence

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence.

La boule ouverte de centre O et de rayon R, ou le plan complexe si $R = +\infty$, est appelée **disque ouvert de convergence** ou **intervalle ouvert de convergence** selon que la variable est complexe ou réelle.

Ce disque est vide si $R = 0$.

Cette notion de disque ouvert de convergence se justifie par le théorème suivant :

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence,
- si $|z_0| < R$ alors $\sum a_n z_0^n$ converge absolument,
- si $|z_0| > R$ alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement, et
- si $|z_0| = R$, on ne sait rien à priori sur la convergence de la série. Tout peut se produire.

La figure 1, page ci-contre, illustre ce théorème.
Démonstration : La première proposition découle directement de la définition du rayon de convergence, $|z_0| < R \Rightarrow |z_0| \in I$, I étant l'intervalle utilisé dans la démonstration de l'existence du rayon de convergence.

Pour la deuxième proposition, on a $|z_0| > R$, supposons que la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Alors il existe A tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \left|z_0^n\right| \leqslant A$.

Mais pour z tel que $|z| < |z_0|$, $|a_n| |z^n| = |a_n| \left|z_0^n\right| \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n \leqslant A \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

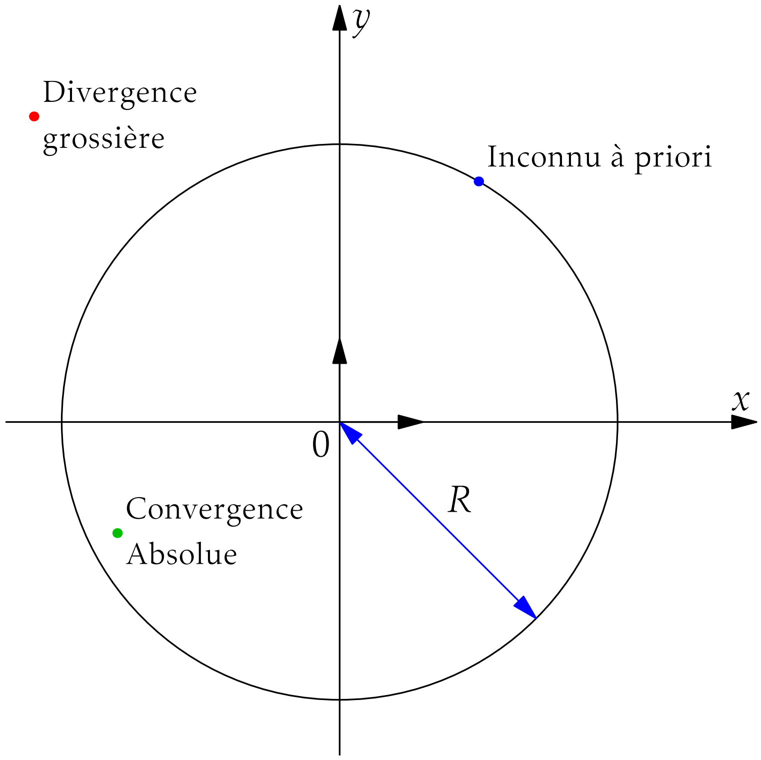

Figure 1 – **Convergence d'une série entière**

Ce qui prouve que $R \geqslant |z|$ pour $|z| < |z_0|$, c'est à dire $R \geqslant |z_0|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. La suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée, la série diverge (très) grossièrement. ■

1.4. Comparaison, équivalence...

Tout se passe en considérant les valeurs absolues des coefficients.
Le premier théorème est un théorème de comparaison :

Théorème : Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_{(a_n)} \geqslant R_{(b_n)}$

Le second théorème découle du premier et est un théorème d'équivalence :

Théorème : Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_{(a_n)} = R_{(b_n)}$

Le troisième théorème est plus surprenant au premier abord :

Théorème : Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n\, a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

1.5. Recherche pratique du rayon de convergence

> On peut toujours travailler en module pour rechercher le rayon de convergence.
> Une inégalité obtenue sur le rayon de convergence est toujours une inégalité large.
> On applique quand on peut le théorème de d'Alembert sur la convergence des séries numériques.
> Cependant on n'oubliera pas que ça n'est pas la seule méthode...

- Par le théorème de d'Alembert.
  On considère $\sum |a_n| \left|z_0^n\right|$ comme une série numérique en ne considérant pas les termes nuls, z_0 étant fixé non nul.
  - Si le théorème de d'Alembert est applicable directement, R est le $|z_0|$ tel qu'on est dans le cas douteux, c'est à dire tel que la limite est 1.
  - Si la limite est toujours nulle, $\mathrm{R} = +\infty$.
  - Si pour un $|z_0|$ donné, la limite est inférieure strictement à 1, $\mathrm{R} \geqslant |z_0|$
  - Si pour un $|z_0|$ donné, la limite est supérieure strictement à 1, $\mathrm{R} \leqslant |z_0|$
- Dans le cas où le théorème de d'Alembert ne fournit pas le résultat, on obtient des inégalités en utilisant le paragraphe précédent.
  Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\mathrm{R} \geqslant |z_0|$, tandis que,
  si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $\mathrm{R} \leqslant |z_0|$.
- Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ est **semi-convergente**, alors $\mathrm{R} = |z_0|$.
  En effet, comme on n'a ni convergence absolue, ni divergence grossière, le rayon de convergence ne peut être ni plus grand ni plus petit que $|z_0|$.
- Si on n'a pas pu conclure en utilisant ce qui précède, on applique le théorème qui découle du lemme d'Abel.

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n 2^n z^{2n}$.

$\dfrac{(n+1)\, 2^{n+1} \,|z|^{2n+2}}{n 2^n \,|z|^{2n}} = \dfrac{n+1}{n} \times 2\,|z|^2 \to 2\,|z|^2$ quand $n \to \infty$, d'où $2\mathrm{R}^2 = 1$ qui donne $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exemple : Cherchons le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{n} x^n$.

- Si $0 \leqslant r < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} r^n = 0$, d'où $\mathrm{R} \geqslant 1$ car il est supérieur ou égal à tous les r qui sont plus petits que 1.
- Si $r > 1$, $\dfrac{\sin n}{n} r^n$ n'a pas de limite quand $n \to \infty$, car $\dfrac{r^n}{n} \to +\infty$ et $\sin n$ n'a pas de limite.
  Donc, $\dfrac{\sin n}{n} r^n \nrightarrow 0$ et $\mathrm{R} \leqslant 1$ car il est inférieur ou égal à tous les r qui sont plus grands que 1.
- Et donc $r = 1$.

1.6. À ne pas oublier !

-
  - $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence ;
  - Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors, $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence ;
-
  - Si on a un z_0 tel que $\sum |a_n| |z_0|^n$ est le cas douteux de d'Alembert, alors $\mathrm{R} = |z_0|$;
  - Si, pour tous les z_0, $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\mathrm{R} = +\infty$;
  - Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, absolument ou pas, alors $\mathrm{R} \geqslant |z_0|$;
  - Si on a un z_0 tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, absolument ou pas, alors $\mathrm{R} \leqslant |z_0|$;
-
  - Si un nombre est plus grand que tous les nombres qui sont plus petit que r, strictement ou pas, alors, il est plus grand que r ;
  - Si un nombre est plus petit que tous les nombres qui sont plus grand que r, strictement ou pas, alors, il est plus petit que r.

Dans le cas où ce qui précède ne fournit pas le résultat, on utilise la propriété suivante :

- $\mathrm{R} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$

> Une inégalité relative au rayon de convergence est **toujours large**.

2. Somme d'une Série Entière de variable réelle

On notera cette série entière : $\sum a_n x^n$.

2.1. Intervalle de convergence, continuité

On a un théorème de continuité très simple qu'on va admettre.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Si $\mathrm{R} = +\infty$, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.
- Si R est fini, $\mathrm{D}_f = \begin{cases}]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\\ \text{ou }]-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \\ \text{ou } [-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\\ \text{ou } [-\mathrm{R}, \mathrm{R}] \end{cases}$

De plus, dans tous les cas, f est **continue** sur D_f.

2.2. Dérivation et intégration terme à terme

Les théorèmes ont encore des énoncés très simples et on va encore les admettre.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit la fonction f par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, est une série entière qui a, de plus, le même rayon de convergence R.

Théorème :
$\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, convergente sur $[0, x]$.

On définit la fonction f par : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Alors $\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, est une série entière qui a encore le même rayon de convergence R et qui converge partout où $\sum a_n x^n$ converge.

> En un mot, on peut dériver et intégrer terme à terme une série entière de variable réelle sur l'**ouvert** de convergence, ce qui ne change pas le rayon de convergence.
> De plus, on peut intégrer terme à terme une série entière sur **l'intervalle de convergence**

2.3. Développements usuels

On peut voir sur le tableau 1, page suivante, les développements usuels en série entière.
La série géométrique et l'exponentielle sont aussi valables pour une variable complexe.
Démonstration :

- Pour e^x, on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en 0 : $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{|x|}$.

  Or $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} = 0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge.

Tableau 1 – Développements Usuels en Série Entière

f	$\mathbf{D}_f$	DSE	R	I
e^x	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$]-1,+\infty[$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$]-1,1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1	$]-1,1[$
$(1+x)^a$	$]-1,+\infty[$	$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$	1 ou $+\infty$ ($a\in\mathbb{N}$)	

D'où $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)=0$ ce qui est le résultat annoncé.

- Pour $\cos x$, on utilise le même procédé : $\left|\cos x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\times 1.$

  Or $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}=0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.
- Pour $\sin x$, on utilise le même procédé : $\left|\sin x-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}\times 1.$

  Or $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}=0$, ce qui se montre facilement en montrant que la série converge. On conclut de la même façon.
- $\frac{1}{1-x}$ a été vu dans le chapitre sur les séries numériques : c'est la somme d'une série géométrique de raison x.
- $\ln(1+x)$ la primitive de la précédente qui s'annulent en 0et où on a changé x en $-x$.
- Pour $(1+x)^\alpha$, avec $x\in\,]-1,1[$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n\right)&=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}a(a-1)\dots(a-n)\,(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a(a-1)\dots(a-n)}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, on montre assez facilement que : $\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqslant|x|$, ce qui donne :

$$\left|(1+x)^\alpha-\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n\right)\right|\leqslant\frac{|a(a-1)\dots(a-n)|}{n!}|x|^n\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right|$$

On montre ensuite que cette quantité tend vers 0 en calculant l'intégrale et en montrant par application du théorème de d'Alembert que c'est le terme général d'une série convergente.

Ce qui est laissé au lecteur, qui prendra soin de séparer les cas $x > 0$ et $x < 0$.

■

3. Développement d'une fonction en Série Entière, Sommation de Séries Entières

Les deux problèmes sont complémentaires, il s'agit

- pour une fonction donnée de trouver une série entière égale à cette fonction sur un intervalle à préciser, ou bien
- pour une série entière de trouver une fonction usuelle à laquelle est est égale sur un intervalle à préciser.

3.1. Fonction développable en série entière

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, définie au voisinage de 0.

On dit que f est développable en série entière à l'origine $\Leftrightarrow$ il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R, et un voisinage V de l'origine tel que : $\forall x \in \mathrm{V},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On remarquera que nécessairement, $\mathrm{V} \subset [-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$.

Théorème : Soit f développable en série entière à l'origine, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, et cette série entière est la série de Taylor : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ce développement, s'il existe, est donc unique, égal à la série de Taylor à l'origine de la fonction.

> Il n'y a pas de réciproque, une fonction peut être de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 sans être développable en série entière à l'origine.

Démonstration : Soit $]-a, a[\subset \mathrm{V}$, alors, $\forall x \in]-a, a[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Or $]-a, a[\subset]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, ce qui prouve que la série entière, et donc la fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. On obtient, en dérivant terme à terme la série entière :

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 \\ f'(0) &= 1 \times a_1 \\ f''(0) &= 2 \times 1 \times a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= n! \times a_n \end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

Corollaire : f définie et développable en série entière sur $]-a, a[$,

$$\begin{cases} f \text{ paire} & \Leftrightarrow \quad \text{son développement est pair} \\ f \text{ impaire} & \Leftrightarrow \quad \text{son développement est impair} \end{cases}$$

3.2. Développement d'une fonction en série entière

Il s'agit ici de la **recherche pratique** du développement d'une fonction donnée en série entière.

- Il faut essayer d'utiliser les développements connus, mais aussi leurs dérivées et leurs primitives...
- Ceci est toujours possible pour une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$, même si la fonction est à valeurs réelles. On se retrouve avec des séries géométriques et des dérivées de séries géométriques. Par exemple :

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ pour } |x| < |a|$$
$$\frac{1}{(a-x)^2} = \left(\frac{1}{a-x}\right)'$$

- On peut essayer la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange comme on l'a fait pour les fonctions usuelles. L'énoncé doit vous guider...
- Enfin, on peut utiliser une équation différentielle. Là aussi, l'énoncé doit vous guider...
  - On considère au départ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ solution de l'équation différentielle. On pose donc $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  - Tout ce qu'on écrit est valable pour $x \in \,]-R, R[$. Il faut le dire...
  - On calcule y' et au besoin y'', on reporte dans l'équation.
  - On éclate tout en sommes de séries entières.
  - On **regroupe ce qui se regroupe naturellement.**
  - Ensuite, on **ré-indexe pour trouver une série entière unique** et nulle.
  - Alors, chaque coefficient est nul, par unicité du développement en série entière quand il existe. On a en général une relation de récurrence entre les coefficients. Cette relation permet normalement de calculer les coefficients mais aussi assez souvent de trouver directement le rayon de convergence, ce qui est indispensable.

Exemple : On peut facilement retrouver les développements de l'exponentielle, du sinus, ..., par ce procédé.

3.3. Sommation de certaines séries entières

Il s'agit ici aussi de la **recherche pratique** de sommation d'une série entière. Il faut essayer :

- en dérivant et en intégrant terme à terme,
- en regroupant ou en séparant des termes,

de se ramener à des séries connues.

Exemple : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$.

On calcule facilement le rayon de convergence $R = 2$, on travaille pour $x \in \,]-2, 2[$.
Le problème est ici d'abord le n en facteur. On considère que cet n est apparu lors d'une dérivation.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^{n-1} = x g'(x)$$

D'où : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x}$ puisqu'il s'agit d'une série géométrique.

Par simple dérivation, $g'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$ et enfin : $\forall x \in \,]-2, 2[\,,\ f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}$.

4. Exponentielle complexe

4.1. Exponentielle complexe

Définition : Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ qu'on appelle exponentielle de z.

Cette définition est bien entendue destinée à prolonger la définition de l'exponentielle dans $\mathbb{R}$.

4.2. Cohérence de cette définition

Pour $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$,
$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta}$.
Tout ceci est bien compatible. Il faudrait encore montrer que $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$ pour avoir les règles de calcul habituelles sur les complexes. On admet ce résultat.